PART2 極限値の条件による関数の決定

要点整理と公式

要点 ① 極限値の条件による関数の決定

関数 $f(x)$，$g(x)$ について

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\alpha \text{ かつ } \lim_{x\to a}g(x)=0$$

ならば，極限値の性質により

$$\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\cdot g(x)\right\}=\alpha\cdot 0=0$$

であるから，次のことが成り立つ。

分母→ 0 となる分数式が収束するための必要条件

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\alpha \text{ かつ } \lim_{x\to a}g(x)=0 \quad \text{ならば } \lim_{x\to a}f(x)=0$$

つまり，$\lim_{x\to a}f(x)=0$ であることは，$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\alpha$ かつ $\lim_{x\to a}g(x)=0$ が成り立つための　　条件である。

(ex) 等式 $\lim_{x\to 3}\frac{ax^2+bx}{x-3}=6$ が成り立つような定数 a，b の値

$\lim_{x\to 3}(\qquad)=$　であるから，等式 $\lim_{x\to 3}\frac{ax^2+bx}{x-3}=6$ ……① の左辺が収束するためには $\lim_{x\to 3}(\qquad\qquad)=$　であることが　　である。

よって　$9a+3b=0$ より $b=-3a$ ……②

このとき

$$\lim_{x\to 3}\frac{ax^2+bx}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{ax^2-3ax}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{ax(x-3)}{x-3}=\lim_{x\to 3}ax=3a$$

となり，①の左辺は $3a$ に収束する。

①より $3a=6$　　よって　$a=2$

②より $b=-6$

したがって　$a=2$，$b=-6$

[MEMO]

2 等式 $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{x^2+ax+b}{x-1}=4$ が成り立つように，定数 a，b の値を求めよ。

Point Pickup

極限値の条件による関数の決定

$\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\alpha$ かつ $\displaystyle\lim_{x\to a}g(x)=0$ ならば $\displaystyle\lim_{x\to a}f(x)=0$

であることを利用

$\displaystyle\lim_{x\to a}f(x)=0$ は，$\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ が収束するための必要条件にすぎないため，$\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ が収束するかの確認(十分性の確認)を行い，実際に極限値が α となるように関数の係数を定める。

第 5 講 PART2 確認問題

1 等式 $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{x^2+a}{x-1}=b$ が成り立つような定数 a, b の値は,

$a=$ アイ , $b=$ ウ である。

2 等式 $\displaystyle\lim_{x\to-2}\frac{x^2+ax+b}{x+2}=1$ が成り立つような定数 a, b の値を求める。

$\displaystyle\lim_{x\to-2}(x^2+ax+b)=$ エ であるから,

$b=$ オ $a-$ カ ……(＊)

(＊)を用いると,

$\displaystyle\lim_{x\to-2}\frac{x^2+ax+b}{x+2}=a-$ キ

であるから, 求める a, b の値は,

$a=$ ク , $b=$ ケ

である。

PART2 極限値の条件による関数の決定

2　等式 $\lim_{x\to1}\dfrac{x^2+ax+b}{x-1}=4$ が成り立つように，定数 a，b の値を求めよ。

[解答]

$\lim_{x\to1}(x-1)=0$ であるから，等式　$\lim_{x\to1}\dfrac{x^2+ax+b}{x-1}=4$　……①の左辺が収束するためには

$\lim_{x\to1}(x^2+ax+b)=0$　すなわち　$1+a+b=0$　より　$b=-a-1$　……②であることが必要である。このとき

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2+ax+b}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{x^2+ax-(a+1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+a+1)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1}(x+a+1)=a+2$$

より，①の左辺は $a+2$ に収束する。

①より　$a+2=4$　　よって　$a=2$　　　このとき②より　$b=-3$

したがって，$a=2$，$b=-3$

第 5 講　PART2 確認問題 解答

1　**[正解]** アイ：-1，ウ：2

[解説]

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2+a}{x-1} = b \quad \cdots\cdots①$$

$\lim_{x \to 1}(x-1)=0$ であるから，①が成り立つとき，

$$\lim_{x \to 1}\left(x^2+a\right)=0 \quad \text{[A]}$$

すなわち，$1+a=0$

$$a=-1$$

このとき，

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2+a}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{(x+1)(x-1)}{x-1}$$

$$= \lim_{x \to 1}(x+1)=2$$

以上より，

$$\boldsymbol{a=-1,\ b=2}$$

[A]　分母 → 0 となる分数式が収束するための条件

$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \alpha$

かつ $\lim_{x \to a} g(x)=0$

ならば，$\lim_{x \to a} f(x)=0$

2 **[正解]** エ：0，オ：2，カ：4，キ：4，ク：5，
ケ：6

[解説]

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^2+ax+b}{x+2}=1 \quad \cdots\cdots ②$$

$\lim_{x \to -2}(x+2)=0$ であるから，②が成り立つとき，

$$\lim_{x \to -2}\left(x^2+ax+b\right)=\mathbf{0}$$ [B]

すなわち，$4-2a+b=0$

$$\boldsymbol{b=2a-4} \quad \cdots\cdots (*)$$

このとき，

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^2+ax+b}{x+2}$$

$$=\lim_{x \to -2} \frac{x^2+ax+(2a-4)}{x+2}$$ [C]

$$=\lim_{x \to -2} \frac{(x+2)(x+a-2)}{x+2}$$

$$=\lim_{x \to -2}(x+a-2)=\boldsymbol{a-4}$$

②より，$a-4=1$

$$\boldsymbol{a=5}$$

(＊)より，$\boldsymbol{b=6}$

[B]　分母 → 0 となる分数式が収束するための条件
$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}=\alpha$
かつ $\lim_{x \to a} g(x)=0$
ならば，$\lim_{x \to a} f(x)=0$

[C]　②の左辺に(＊)の右辺を代入する。